# KESS - Die Komplexität evolutionär stabiler Strategien

Andreas Lochbihler

Universität Karlsruhe (TH)

10.11.2008

K. Etessami, A. Lochbihler: The computational complexity of evolutionarily stable strategies. Int. J. of Game Theory (2008) 37:93–113

# Überblick

# Evolutionär stabile Strategie

Evolutionär stabile Strategie $x^*$ (ESS):

- symmetrisches Normalform-Spiel für 2 Spieler
  mit Auszahlungsmatrix $A$ ($A_1 = A$, $A_2 = A^\top$)
- symmetrisches Nash-Gleichgewicht $(x^*, x^*)$:

$$x^{*\top} A x^* \geq y^\top A x^* \text{ für alle Strategien } y$$

- Stabilität: Für alle $y \neq x^*$ gilt:

$$y^\top A x^* = x^{*\top} A x^* \longrightarrow y^\top A y < x^{*\top} A y$$

- Regularität: Träger von $x^*$ enthält alle reinen besten Antworten auf $x^*$

$$supp(x^*) \supseteq \{i \mid e_i^\top A x^* = x^{*\top} A x^*\} = extsupp(x^*)$$

# Beispiel zu ESS: Stein-Schere-Papier

| $A$ | Stein | Schere | Papier |
|---|---|---|---|
| Stein | 0 | 1 | -1 |
| Schere | -1 | 0 | 1 |
| Papier | 1 | -1 | 0 |

- Ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht $(x^*, x^*)$: $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^\top$
- Nicht evolutionär stabil: Für $y = (1, 0, 0)^\top$: $y^\top A y = 0 = {x^*}^\top A y$

# Beispiel zu ESS: Stein-Schere-Papier

| $A$ | Stein | Schere | Papier |
|---|---|---|---|
| Stein | -1 | 1 | -1 |
| Schere | -1 | -1 | 1 |
| Papier | 1 | -1 | -1 |

- Ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht $(x^*, x^*)$: $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^\top$
- Evolutionär stabil: $x^*$ einziges Maximum von $y^\top Ay = -(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ über $y^\top \mathbf{1} = 1$, $y \geq \mathbf{0}$
- Regulär: Träger $supp(x^*) = \{1, 2, 3\}$ enthält alle besten Antworten

# Beispiel zu ESS: Stein-Schere-Papier

| $A$ | Stein | Schere | Papier |
|---|---|---|---|
| Stein | 1 | 1 | -1 |
| Schere | -1 | 1 | 1 |
| Papier | 1 | -1 | -2 |

- Symmetrisches Nash-Gleichgewicht $(x^*, x^*)$: $x^* = (1, 0, 0)^\top$
- Evolutionär stabil: Beste Antwort $y = (t, 0, 1 - t)^\top$ auf $x^*$:

$$y^\top A y - {x^*}^\top A y = -(t-1)^2 < 0 \text{ für } t \neq 1$$

- Nicht regulär: $\mathit{extsupp}(x^*) = \{1, 3\}$, $\mathit{supp}(x^*) = \{1\}$

# Komplexitätsfragen zu ESSn

Wie aufwändig ist es im schlechtesten Fall, ...

- ... auf die Existenz einer (regulären) ESS zu testen?
- ... eine Strategie als (reguläre) ESS zu verifizieren?
- ... eine (reguläre) ESS zu berechnen?

Abschätzungen nach oben und unten!

# Komplexitätsklassen

**P** Entscheidungsprobleme, die in polynomieller Zeit entschieden können werden

LP Lineare Optimierung (Khachiyan)

**NP** Entscheidungsprobleme, für deren „Ja"-Instanzen *a* es ein polynomiell langes Zertifikat *c* gibt, mit dessen Hilfe in polynomieller Zeit überprüft werden kann, ob *a* wirklich eine „Ja"-Instanz ist.

SAT Ist eine Boolesche Formel (in KNF) erfüllbar?
(Zertifikat = erfüllende Belegung)

QP Quadratische Optimierung (Vavasis)

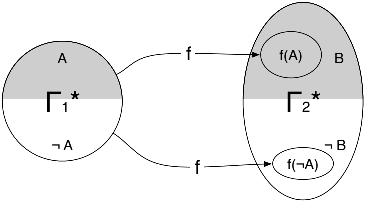
**coNP** Komplement von **NP** („Nein" statt „Ja")

UNSAT Ist eine Boolesche Formel *un*erfüllbar?

TAUT Ist eine Boolesche Formel eine Tautologie?
(Zertifikat = nicht erfüllende Belegung)

# Reduktion

$f : \Gamma_1^* \longrightarrow \Gamma_2^*$ ist eine Reduktion eines Entscheidungsproblems $A$ auf ein Entscheidungsproblem $B$, wenn




- $f$ in polynomieller Zeit berechenbar ist,
- Ja-Instanzen in $A$ auf Ja in $B$ und
- Nein-Instanzen in $A$ auf Nein in $B$ abgebildet werden.

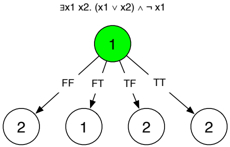
$\Rightarrow$ Hat man einen (polynomiellen) Algorithmus für $B$, so erhält man mit der Redukion einen (polynomiellen) Algorithmus für $A$.

$\Rightarrow$ Ist $A$ ein schweres Problem, dann ist $B$ wohl auch ein schweres Problem.

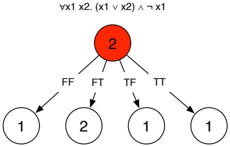
$B$ ist **hart** bzgl. einer Klasse **K** von Problemen, falls jedes Problem aus **K** sich auf $B$ reduzieren lässt. Ist $B$ auch in **K**, dann ist $B$ **K-vollständig**.

# Polynomielle Hierarchie

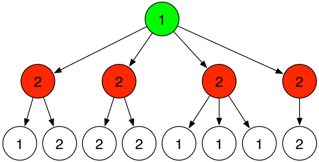
SAT ist **NP**-hart:
Für $A \in$ **NP** gibt es eine Reduktion $f_A$ mit
$a \in A$ gdw. $\exists \overline{x}. f_A(a)(\overline{x})$.




TAUT ist **coNP**-hart:
Für $A \in$ **coNP** gibt es eine Reduktion $f_A$ mit
$a \in A$ gdw. $\forall \overline{x}. f_A(a)(\overline{x})$.

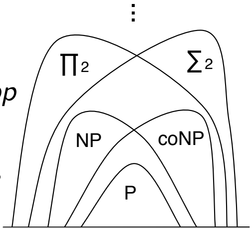



$\Sigma_2$ ist die Menge aller Probleme $A$, die sich in eine Formel der Form $\exists \overline{x}. \forall \overline{y}. \Phi(\overline{x}, \overline{y})$ mit polynomiell großem $\Phi$ kodieren lassen.



# Komplexitäten von Gleichgewichten

Spiele mit zwei Spielern



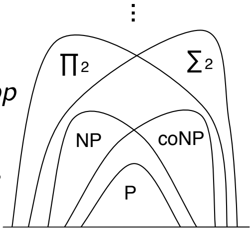

| | |
|---|---|
| **P** | Nash-GG für Nullsummenspiel<br>Symm. Nash-GG für gegebenen *extsupp*<br>(Reduktion auf $\mathrm{LP}$) |
| **PPAD**-vollst. | Berechnung eines beliebigen Nash-GGs<br>Lemke-Howson-Algorithmus 1964<br>Härte: Chen, Deng 2006 |
| **NP**-vollst. | Mehr als ein Nash-GG? (Gilboa, Zemel 1989)<br>Ist eine reine Strategie im Träger eines Nash-GG? (G., Z.)<br>Existiert ein pareto-optimales Nash-GG?<br>(Conitzer, Sandholm 2003) |

Dieser Vortrag:

- Existiert eine ESS? **NP**-hart, **coNP**-hart, in $\Sigma_2$
- Ist eine Strategie evolutionär stabil? **coNP**-vollständig
- Existiert eine reguläre ESS? **NP**-vollständig

# Komplexitäten von Gleichgewichten

Spiele mit zwei Spielern




| | |
|---|---|
| **P** | Nash-GG für Nullsummenspiel<br>Symm. Nash-GG für gegebenen *extsupp*<br>(Reduktion auf $\mathrm{LP}$) |
| **PPAD**-vollst. | Berechnung eines beliebigen Nash-GGs<br>Lemke-Howson-Algorithmus 1964<br>Härte: Chen, Deng 2006 |
| **NP**-vollst. | Mehr als ein Nash-GG? (Gilboa, Zemel 1989)<br>Ist eine reine Strategie im Träger eines Nash-GG? (G., Z.)<br>Existiert ein pareto-optimales Nash-GG?<br>(Conitzer, Sandholm 2003) |

Dieser Vortrag:

- Existiert eine ESS? **NP**-hart, **coNP**-hart, in $\Sigma_2$
- Ist eine Strategie evolutionär stabil? **coNP**-vollständig
- Existiert eine reguläre ESS? **NP**-vollständig

# ESS als Entscheidungsprobleme

| | |
|---|---|
| ESS | Eingabe: Auszahlungsmatrix<br>Antwort: Gibt es eine ESS? |
| REGESS | Eingabe: Auszahlungsmatrix<br>Antwort: Gibt es eine reguläre ESS? |
| TESTESS | Eingabe: Auszahlungsmatrix und eine Strategie $x$<br>Antwort: Ist $x$ evolutionär stabil? |
| TESTREGESS | Eingabe: Auszahlungsmatrix und eine Strategie $x$<br>Antwort: Ist $x$ regulär evolutionär stabil? |

# **NP**-Härte

Reduktion von SAT auf ESS und REGESS:

Beispielformel: $\Phi = \underbrace{(v_1 \vee v_2 \vee v_3)}_{=c_1} \wedge \underbrace{(\neg v_2)}_{=c_2} \wedge \underbrace{(\neg v_1 \vee \neg v_3)}_{=c_3}$

| $A_\Phi$ | $v_1$ | $\neg v_1$ | $v_2$ | $\neg v_2$ | $v_3$ | $\neg v_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $\neg v_1$ | -2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $v_2$ | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $\neg v_2$ | 1 | 1 | -2 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -2 | -1 | -1 | -1 |
| $\neg v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| $c_1$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| $c_2$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| $c_3$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 | -1 |

$x$ evolutionär stabil $\Rightarrow c_1, c_2, c_3 \notin supp(x)$,

$$x(v_i) = \tfrac{1}{3},\ x(\neg v_i) = 0 \text{ oder } x(v_i) = 0,\ x(\neg v_i) = \tfrac{1}{3}$$

Für solche $x$ sind nicht erfüllte Klauseln beste Antworten.

# **NP**-Härte

Reduktion von SAT auf ESS und REGESS:

Beispielformel: $\Phi = \underbrace{(v_1 \vee v_2 \vee v_3)}_{=c_1} \wedge \underbrace{(\neg v_2)}_{=c_2} \wedge \underbrace{(\neg v_1 \vee \neg v_3)}_{=c_3}$

| x | $A_\Phi$ | $v_1$ | $\neg v_1$ | $v_2$ | $\neg v_2$ | $v_3$ | $\neg v_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | $v_1$ | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $\neg v_1$ | -2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $v_2$ | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $\frac{1}{3}$ | $\neg v_2$ | 1 | 1 | -2 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -2 | -1 | -1 | -1 |
| $\frac{1}{3}$ | $\neg v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $c_1$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $c_2$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $c_3$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 | -1 |

$x$ evolutionär stabil $\Rightarrow c_1, c_2, c_3 \notin supp(x)$,

$x(v_i) = \frac{1}{3}$, $x(\neg v_i) = 0$ oder $x(v_i) = 0$, $x(\neg v_i) = \frac{1}{3}$

Für solche $x$ sind nicht erfüllte Klauseln beste Antworten.

# NP-Härte

Reduktion von SAT auf ESS und REGESS:

Beispielformel: $\Phi = \underbrace{(v_1 \vee v_2 \vee v_3)}_{=c_1} \wedge \underbrace{(\neg v_2)}_{=c_2} \wedge \underbrace{(\neg v_1 \vee \neg v_3)}_{=c_3}$

| x | $A_\Phi$ | $v_1$ | $\neg v_1$ | $v_2$ | $\neg v_2$ | $v_3$ | $\neg v_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | $v_1$ | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $\neg v_1$ | -2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $v_2$ | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $\frac{1}{3}$ | $\neg v_2$ | 1 | 1 | -2 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $\frac{1}{3}$ | $v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -2 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $\neg v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $c_1$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $c_2$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| 0 | $c_3$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 | -1 |

$x$ evolutionär stabil $\Rightarrow c_1, c_2, c_3 \notin supp(x)$,

$$x(v_i) = \frac{1}{3},\ x(\neg v_i) = 0 \text{ oder } x(v_i) = 0,\ x(\neg v_i) = \frac{1}{3}$$

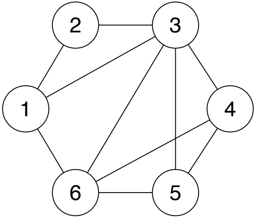
Für solche $x$ sind nicht erfüllte Klauseln beste Antworten.

# Cliquen in Graphen

**Graph** Menge von Knoten $V$ und Kanten $E$ zwischen Knoten

**Clique** Menge von Knoten $C$, die alle untereinander durch Kanten verbunden sind.

**COCLIQUE** Hat die größte Clique weniger als $k$ Knoten? **coNP**-vollständig




Adjazenzmatrix $A$

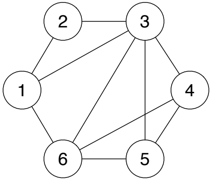
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**Lemma** (Motzkin, Straus 1965):
Sei $d$ die maximale Cliquengröße. Für alle $x \geq \mathbf{0}$ mit $x^\top \mathbf{1} = 1$ gilt:

$$x^\top A x \leq \frac{d-1}{d}$$

# coNP-Härte

Reduktion von coClique auf ESS und TestESS

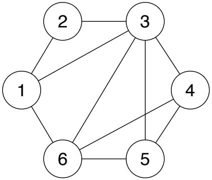



| $A_{(G,k)}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| a | $\frac{k-1}{k}$ | $\frac{k-1}{k}$ | $\frac{k-1}{k}$ | $\frac{k-1}{k}$ | $\frac{k-1}{k}$ | $\frac{k-1}{k}$ | 1 | 0 | 0 |
| b | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| c | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$x$ evolutionär stabil $\Rightarrow x(a) = 1$

# coNP-Härte

Reduktion von coClique auf ESS und TestESS




| $y$ | $A_{(G,4)}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 6 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | a | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | 0 | 0 |
| 0 | b | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | c | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$k = 4$

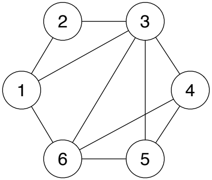
$y^\top A_{(G,4)} y = \frac{3}{4}$

$x^\top A_{(G,4)} y = \frac{3}{4}$

$x$ evolutionär stabil $\Rightarrow x(a) = 1$

# **coNP**-Härte

Reduktion von coClique auf ESS und TestESS




| $y$ | $A_{(G,5)}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{4}$ | 6 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | a | $\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | 1 | 0 | 0 |
| 0 | b | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | c | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$k = 5$

$y^\top A_{(G,5)} y = \frac{3}{4}$

$x^\top A_{(G,5)} y = \frac{4}{5}$

$x$ evolutionär stabil $\Rightarrow x(a) = 1$

# Härte-Resultate

**NP**-hart

$$\Phi \xrightarrow{f_1} A_\Phi$$

Reduktion von SAT auf ESS und REGESS

- $f_1$ ist polynomiell berechenbar
- $\Phi$ nicht erfüllbar: $A_\Phi$ hat keine ESSn
- $\Phi$ erfüllbar: $A_\Phi$ hat ESSn
- Jede erfüllende Belegung entspricht genau einer ESS und umgekehrt.
- Alle ESS in $A_\Phi$ sind regulär.

**coNP**-hart

$$(G, k) \xrightarrow{f_2} A_{(G,k)}$$

Reduktion von coCLIQUE auf ESS und TESTESS

- $f_2$ ist polynomiell berechenbar
- $a$ ist die einzige potentielle ESS
- $a$ ist evolutionär stabil gdw. die größte Clique in $G$ weniger als $k$ Knoten umfasst
- Erkennen einer ESS (TESTESS) ist bereits **coNP**-hart

# Komplexität von TESTESS und TESTREGESS

- Test auf symmetrisches Nash-GG $(x^*, x^*)$ ist einfach!
- **Stabilität** (Haigh 1975, Abakuks 1980, Bomze 1992):
  Sei $M' = extsupp(x^*) - \{m_0\}$ und $C \in \mathbb{R}^{M' \times M'}$ geeignet. $x^*$ ist stabil gdw. f. a. $w \in \mathbb{R}^{M'}$ mit $w \neq 0$ und $w_i \geq 0$ für $i \in M' - supp(x^*)$ gilt:
  $$w^\top C w > 0$$
  - Wenn $x^*$ regulär ist, d.h. $supp(x^*) = extsupp(x^*)$:
    Test, ob $C$ positiv definit (in **P**)
    $\Rightarrow$ TESTREGESS in **P**
  - Wenn $supp(x^*) \subsetneq extsupp(x^*)$: Reduktion auf $\mathrm{QP}$
    - $x^*$ **nicht** stabil gdw. es ex. $w \in \mathbb{R}^{M'}$ mit $w^\top(-C)w \geq 0$, $w \neq \mathbf{0}$ und $w_i \geq 0$ für $i \in M' - supp(x^*)$.
    - Umschreiben von $w \neq \mathbf{0}$:
      $2|M'|$ viele $\mathrm{QP}$ Probleme mit $\pm w_j \geq 1$ als weitere Bedingung.

    Da $\mathrm{QP}$ in **NP** liegt, ist TESTESS in **coNP** und also **coNP**-vollständig.

    Bomze: Iterative Prozedur für diesen Test

# Trägerkriterium

**Lemma (Trägerkriterium):**
Wenn $x^*$ evolutionär stabil ist und $(y, y)$ ein symmetrisches Nash-GG mit $supp(y) \subseteq extsupp(x^*)$, dann $x^* = y$.

**Beweis** durch Widerspruch:

- Angenommen, $y \neq x^*$.
- Wegen $supp(y) \subseteq extsupp(x^*)$ ist $y$ eine beste Antwort auf $x^*$.
- Da $(y, y)$ Nash-GG, gilt $x^{*\top} Ay \leq y^\top Ay$.
  Widerspruch zur Stabilität von $x^*$.

**Folgerung:**

1. Für jeden erweiterten Träger gibt es höchstens eine ESS.
2. Dann ist auch ein solches Nash-GG eindeutig.

# Algorithmen für RegESS und ESS

Algorithmus für RegESS und ESS:
Eingabe: Auszahlungsmatrix $A$

1. Rate den erweiterten Träger $M$ des Strategiekandidaten
2. Berechne symmetrisches Nash-GG $(x, x)$ mit $extsupp(x) = M$ (in **P**)
3. Falls kein solches $x$ existiert, dann gibt es auch keine solche ESS
4. Wende TestRegESS bzw. TestESS auf $(A, x)$ an

Komplexität:

- TestRegESS ist in **P**, damit RegESS in **NP**
  Zertifikat = erweiterter Träger = Träger
- TestESS ist in **coNP**, damit ESS in $\Sigma_2$
- Die „Ratestrategie“ ist auch Sat-Löser

Bomze 1992: Branch-and-Bound-Ansatz für 1.

# Inapproximierbarkeit

$A \xrightarrow{f} x$ ist eine Approximation für (reg.) ESS, falls gilt:

- $f$ ist in polynomieller Zeit berechenbar
- Falls $A$ eine mind. (reg.) ESS besitzt:
  $d(f(A), x) < \epsilon_A$ für eine (reg.) ESS $x$ von $A$

Angenommen, es gäbe so eine Approximation $f$ mit $d(y, x) = ||y - x||_\infty$ und $\epsilon_A \leq \frac{1}{m_A}$, wobei $m_A =$ Anzahl der Strategien in $A$. Dann wäre dies ein **P**-Algorithmus für SAT:

1. Wende $f$ auf $A_\Phi$ an, $y = f(A_\Phi)$.
2. Wegen $\frac{2}{m_{A_\Phi}} < \frac{1}{n}$ existiert maximal ein $x$ mit $||y - x||_\infty < \frac{1}{m_{A_\Phi}}$, so dass $x(v_i) = \frac{1}{n}$, $x(\neg v_i) = 0$ oder $x(v_i) = 0$, $x(\neg v_i) = \frac{1}{n}$.
3. Falls es kein solches $x$ gibt, ist $\Phi$ unerfüllbar.
4. $\Phi$ ist erfüllbar gdw. dieses $x$ eine erfüllende Belegung darstellt.

Solch eine Approximation gibt es also nicht (außer **P**=**NP**).

# Beispiel zur Approximation

$$\Phi = (v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_2) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_3)$$
$$n = 3,\ m_{A_\Phi} = 9,\ \epsilon_{A_\Phi} = \frac{1}{9}$$

| $A_\Phi$ | $v_1$ | $\neg v_1$ | $v_2$ | $\neg v_2$ | $v_3$ | $\neg v_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $\neg v_1$ | -2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $v_2$ | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $\neg v_2$ | 1 | 1 | -2 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| $v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -2 | -1 | -1 | -1 |
| $\neg v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| $c_1$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| $c_2$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| $c_3$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 | -1 |

# Beispiel zur Approximation

$$\Phi = (v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_2) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_3)$$
$$n = 3,\ m_{A_\Phi} = 9,\ \epsilon_{A_\Phi} = \frac{1}{9}$$

| $f(A_\Phi)$ | $A_\Phi$ | $v_1$ | $\neg v_1$ | $v_2$ | $\neg v_2$ | $v_3$ | $\neg v_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.25 | $v_1$ | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0.01 | $\neg v_1$ | -2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0.00 | $v_2$ | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0.23 | $\neg v_2$ | 1 | 1 | -2 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0.00 | $v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -2 | -1 | -1 | -1 |
| 0.40 | $\neg v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| 0.00 | $c_1$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| 0.10 | $c_2$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| 0.01 | $c_3$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 | -1 |

# Beispiel zur Approximation

$$\Phi = (v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_2) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_3)$$
$$n = 3,\ m_{A_\Phi} = 9,\ \epsilon_{A_\Phi} = \frac{1}{9}$$

| $f(A_\Phi)$ | x | $A_\Phi$ | $v_1$ | $\neg v_1$ | $v_2$ | $\neg v_2$ | $v_3$ | $\neg v_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.25 | $\frac{1}{3}$ | $v_1$ | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0.01 | 0 | $\neg v_1$ | -2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0.00 | 0 | $v_2$ | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0.23 | $\frac{1}{3}$ | $\neg v_2$ | 1 | 1 | -2 | 0 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 |
| 0.00 | 0 | $v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -2 | -1 | -1 | -1 |
| 0.40 | $\frac{1}{3}$ | $\neg v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | -2 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| 0.00 | 0 | $c_1$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| 0.10 | 0 | $c_2$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 |
| 0.01 | 0 | $c_3$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | -1 | -1 | -1 |

# Folgerungen für reguläre ESS (**P**$\neq$**NP**, **NP**$\neq$**coNP**)

Reguläre ESS:

- Test, ob eine Strategie evolutionär stabil und regulär ist: effizient
- Berechnung einer regulären ESS mit gegebenen Träger: effizient
- Suche nach Träger ist **NP**-vollständig: nicht effizient
- Beliebig genaue Approximation von regulären ESSn: nicht effizient

Allgemeine ESS:

- Test, ob eine Strategie evolutionär stabil ist: nicht effizient
- Existenz einer ESS ist in $\Sigma_2$-(**NP**$\cup$**coNP**): nicht effizient
- Berechnung einer ESS: nicht effizient
- Beliebig genaue Approximation von ESSn: nicht effizient

# Zusammenfassung

Zusammenfassung:

- Reguläre ESS sind „gutartig"
- Allgemeine ESS sind deutlich komplexer
  Erkennen einer allgemeinen ESS ist wahrscheinlich exponentiell
- **NP**-, **coNP**-Härtenachweise liefern nur Schranken
  für die worst-case Komplexität
- Keine Aussage über die praktische Komplexität

**Noam Nisan**. ECCC 2006
*A note on the computational hardness of evolutionary stable strategies*

Vereinfachung und Zusammenfassung der Reduktionen